CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2021 **Durée : 2H**
Coefficient : 1

MATHEMATIQUES

Cette épreuve comporte deux (02) pages numérotées 1/2 et 2/2.

Le candidat recevra une feuille de papier millimétré.

EXERCICE 1 (6 points)

On donne $A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $B = 3\sqrt{5} - 7$

1. Ecris A sans un dénominateur rationnel.
2. a) Justifie que B est négatif
   b) Justifie que A = - B
   c) Encadre A par deux décimaux consécutifs d'ordre 2.
3. Sachant que $k = (A - B)^2$, justifie que $\sqrt{k} = 2A$

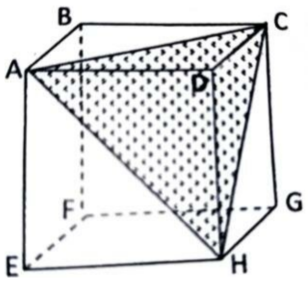
EXERCICE 2 (4 points)

Résous graphiquement le système (I) de deux inéquations d'inconnus *x* et *y*.

$$(\mathrm{I}): \begin{cases} 3x + 7y > -7 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases}$$

EXERCICE 3 (4 points)

L'unité est le centimètre
On ne te demande pas de reproduire la figure contre qui n'est pas en grandeurs réelles ; ABCDEFGH représente un cube de 6cm d'arête



1) Justifie que ACH est un triangle équilatéral.
2) Calcule la distance AC.
3) Calcule l'aire du triangle ACH.

CONCOURS DIRECT D'ENTREE AU CAFOP (INSTITUTEUR ADJOINT)
SESSION 2021

CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES -

EXERCICE 1 **(6 POINTS)**

$A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}}$ et $B = 3\sqrt{5} - 7$

1. **Ecris A sans un dénominateur rationnel**

$A = \frac{4}{7+3\sqrt{5}} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{(7+3\sqrt{5})(7-3\sqrt{5})} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{49-45} = \frac{4(7-3\sqrt{5})}{4}$

$\mathbf{A = (7 - 3\sqrt{5})}$**…………………………………………………………………………. 1 point**

2. .

a) Justifie que B est négatif

$B = 3\sqrt{5} - 7$

$(3\sqrt{5})^2 = 9 \times 5 = 45$ et $7^2 = 49$

$45 < 49$ donc, $\sqrt{45} < \sqrt{49}$ c'est-à-dire $3\sqrt{5} < 7$

Donc, $3\sqrt{5} - 7 < 0$

Conclusion : B < 0 ……………………………………………………………………. 1 point

b) Justifie que A = -B

Première méthode : $-B = -(B = 3\sqrt{5} - 7) = -3\sqrt{5} + 7 = (7 - 3\sqrt{5}) = A$.

Donc, A = -B

Première méthode : $A + B = (\mathbf{7 - 3\sqrt{5}}) + (3\sqrt{5} - 7) = (7 - 7) + (\mathbf{-3\sqrt{5} + 3\sqrt{5}})$

A + B = 0 . Donc, A = - B ……………………………………………………………1 point

c) Encadre A par deux nombres décimaux d'ordre 2

$2,236 < \sqrt{5} < 2,237$

$3 \times 2,236 < 3\sqrt{5} < 3 \times 2,237$ c'est-à-dire $6,708 < 3\sqrt{5} < 6,711$

$-6,711 < -3\sqrt{5} < -6,708$ ……………………………………………………………**0,5 point**

$7 - 6,7083 < 7 - 3\sqrt{5} < 7-6,708$

c'est-à-dire $0,289 < 7 - 3\sqrt{5} < 0,292$ ………………………………………………**0,5 point**

$0,29 < 7 - 3\sqrt{5} < 0,30$. Donc, $\mathbf{0,29 < A < 0,30}$ ……………………………………**0,5 point**

3. **Sachant que k = (A – B)²; justifie que** $\sqrt{k} = 2A$

$A - B = (7 - 3\sqrt{5}) - (3\sqrt{5} - 7) = 14 - 6\sqrt{5} = 2(7 - 3\sqrt{5})$ ……………………**0,5 point**

$k = (A - B)^2 = 4(7 - 3\sqrt{5})^2$. Donc,

$\sqrt{k} = \sqrt{4(7 - 3\sqrt{5})2} = 2(7 - 3\sqrt{5}) = 2A$ ………………………………………**0,5 point**

Donc, $\sqrt{k} = 2A$ ………………………………………………………………………………**0,5 point**

EXERCICE 2 (4 POINTS)

Résous graphiquement le système (I) de deux équations d'inconnus x et y

$$(\mathrm{I}) : \begin{cases} 3x + 7y > -7 \\ -3x + 2y > -12 \end{cases}$$

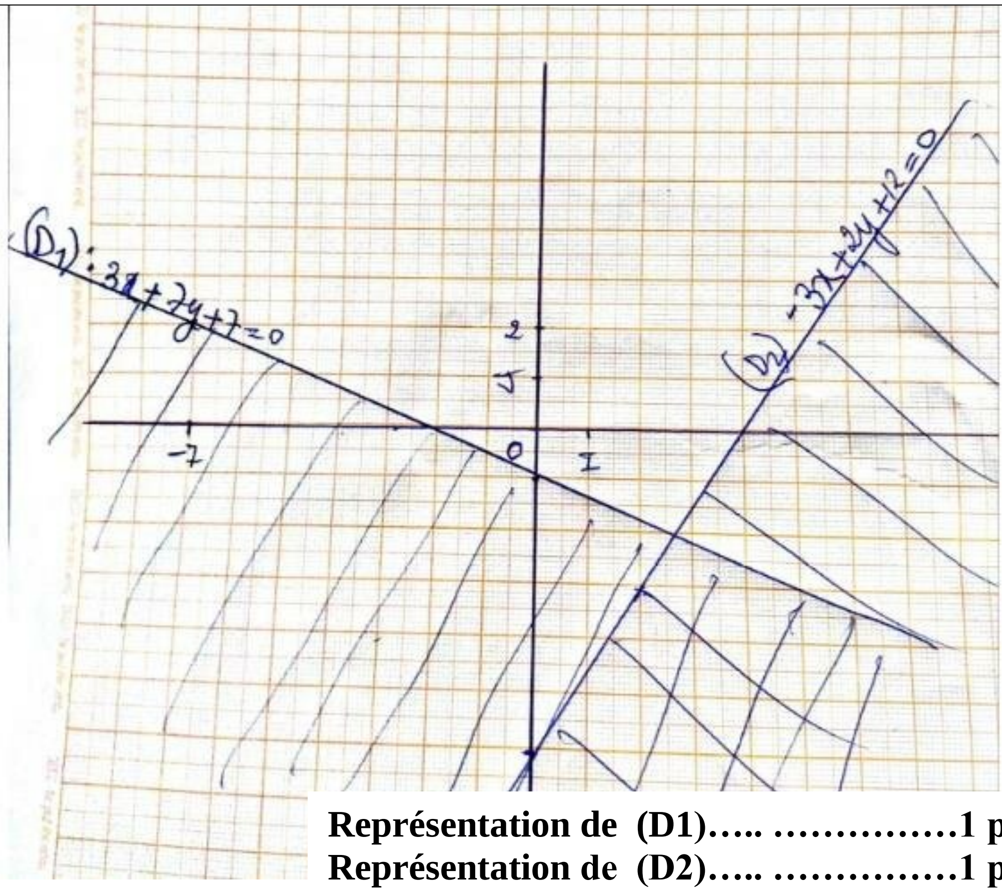
- Traçons la droite (D_1) d'équation $3x + 7y = -7$ et hachurons sur le dessin le demi-plan ne contenant le point O(0 ;0) car 3x0 + 7x0 = 0 et 0 > 7
- Traçons la droite (D_2) d'équation $-3x + 2y = -12$ et hachurons sur le dessin le demi-plan ne contenant le point O(0 ;0) car -3x0 + 2x0 = 0 et 0 > −12
- L'ensemble des solutions S est donc l'ensemble des couples (x ; y) correspondant aux coordonnées des points M se trouvant dans la partie non-hachurée, c'est-à-dire le demi-plan contenant le point O(0 ;0)

	X	Y			X	y
(D_1) : $3x + 7y = -7$	0	-7		(D_2) : $-3x + 2y = -12$	0	2
	-1	2			-6	-3

(D_1) sera représenté par les points **A(0 ; -1) et B(-7 ;-2)**

(D_2) sera représenté par les points **A'(0 ;-6) et B'(2 ; -3)**

...1 point



Représentation de (D1)….. ……………1 point
Représentation de (D2)….. ……………1 point
Identification correcte de S ……………1 point

EXERCICE 3 (4 POINTS)

1. ABCDEFGH est un cube à 6 faces carrées superposables.

- Dans un carré, les diagonales ont la même mesure.
- [AC] est une diagonale de ABCD. (1)
- CGHD est une face de ce cube ; donc [CH] est une diagonale de CGHD. (2)
- ADHE est une face de ce cube ; donc [HA] est une diagonale de ADHE. (3)

D'après (1) ; (2) et (3), [AC] ; [CH] et [HA] ont la même mesure.
Donc, ACH est un triangle équilatéral. **……………………………………1,5 point**

2. **Calcule la distance AC**

ABCD est un carré dont la mesure en centimètre du côté est 6. Donc la mesure de sa diagonale AC est $AB\sqrt{2}$, c'est-à-dire$6\sqrt{2}$.
Donc, $AC = 6\sqrt{2}$ **………………………………………………………………1 point**

3. **Calcule de l'aire du triangle ACH**

Soit P le pied de la hauteur issu de C. l'aire de ACH est $\frac{AH \times CP}{2}$
$CP^2 = AC^2 - AP^2 = (6\sqrt{2})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 72 - 18 = 54$. **………………………..0,5 point**
Donc, $CP = 3\sqrt{6}$ **…………………………………………………………………….0,5 point**
donc, Aire ACH $= \frac{6\sqrt{2} \times 3\sqrt{6}}{2} = \frac{18\sqrt{12}}{2} = 18\sqrt{3}$ **…………………………….0,5 point**

EXERCICE 4 (6 POINTS)

A(2 ;5) B(2 ;1) D(-1 ; 5)

1) **Démontre que le triangle ABD est rectangle en A.**

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2-2\\1-5\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1-2\\5-5\end{pmatrix}$ d'où, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\-4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = (0\text{x}(-3)) + (-4).0 = 0 + 0 = 0$
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = 0$ donc, $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AD}$. D'où, **ABD est rectangle en A. ………………… 1 point**

2) **Calcule les coordonnées du point E, centre du cercle (C)**

ABD est rectangle en A. Donc, [DB] = diamètre de (C)
E étant le centre de (C), alors E = milieu de [DB]

- $X_E = \frac{1}{2}(2-1)$ c'est-à-dire $X_E = \frac{1}{2}$
- $Y_E = \frac{1}{2}(1+5)$ c'est-à-dire $Y_E = 3$

Donc, $E(\frac{1}{2} ; 3)$ ………………………………………………… 1 point

3) Détermine une équation de la droite (BD)

$\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1-2\\5-1\end{pmatrix}$ C'est-à-dire $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ **…………………………………………0,5 point**

Soit M(x ;y) ∈ (BD). Donc, $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$ sont colinéaires

D'où, $\det(\overrightarrow{BM};\overrightarrow{BD}) = \begin{vmatrix}x-2 & -3\\y-1 & 4\end{vmatrix} = 0$

Donc, $4(x-2) - (-3)(y-1) = 4x + 3y - 8 - 3 = 0$

(BD) : $4x + 3y - 11 = 0$ est une équation de la droite (BD) ………………. 1 point

4) Détermine une équation de la tangente (T)

(T) est la tangente au cercle (C) au point B. Donc, (T) ⊥ (DB) au point B.

Soit N(x ;y) ∈ (T).

Donc, $\overrightarrow{NB} \perp \overrightarrow{DB}$

$\overrightarrow{NB}\begin{pmatrix}x-2\\y-1\end{pmatrix} \perp \overrightarrow{DB}\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix}$. **……………………………………………………… 1 point**

-

D'où, $3(x-2) + (-4)(y-1) = 0$

(T) : $3x - 4y - 2 = 0$ est une équation de la tangente au cercle (C) au point B ………

………………………………………………………………………………………0,5 point

5) Démontrons que F appartient à (C)

Le cercle (C) est circonscrit au triangle ABD rectangle en A.

Le centre E du cercle (C) est le milieu de [DB].

A est un point de (C).

(BD) est un axe de symétrie de (C)

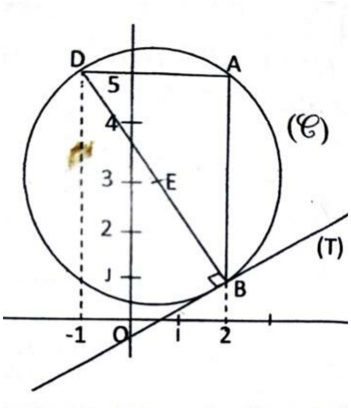
Le symétrique de A par rapport à (BD) est un point de (C).

Donc, F appartient à (C) ……………………………………………………... 1 point

EXERCICE 4 **(4 points)**

Sur la figure ci-contre qui n’est pas en vraies grandeurs ;

- (O,I,J) est un repère orthonormé ;
- On donne les points suivants : A(2 ;5) B(2 ;1) et D(-1 ;5)
- Le point E est le centre du cercle ($\mathscr{C}$)
- Le cercle ($\mathscr{C}$) est circonscrit au triangle ABD ;
- La droite (T) est la tangente à ($\mathscr{C}$) au point B.
- Le point F est le symétrique du point A par rapport à la droite (BD)



1) Démontre que le triangle ABD est rectangle en A.
2) Calcule les coordonnées du point E, centre du cercle ($\mathscr{C}$).
3) Détermine une équation de la droite (BD).
4) Détermine une équation de la tangente (T).
5) Démontre que le point F appartient au cercle ($\mathscr{C}$).